direct sumな測度空間について(3)

著者	佐藤 金吾
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	14
ページ	47-53
発行年	1999-03-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/1590

direct sumな測度空間について (3)

佐藤金吾

On a measure space having the direct sum property (3)

Kingo SATO

1. はじめに

この小論では [1], [2] で論じた finite subset property をもつ空間, localizable な空間, そして direct sum な測度空間について引き続きその性質を調べる.

特に, strictly direct sum の一般化である概念を導入する.

2. measurable element と supremum の性質

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間とする. μ^*, μ_* をそれぞれ μ から導入された外測度, 内測度とし, また, μ^* －可測集合全体からなる σ － field を $\mathfrak{B}^*$ とする.

$\mathfrak{F}_0$ を有限測度をもつ集合の全体とする. すなわち,

$$\mathfrak{F}_0 = \{B \in \mathfrak{F},\ \mu(B) < \infty\}.$$

定義 2.1. $A \subset \Omega$ に対して, 次の性質をもつ集合 $F \in \mathfrak{F}$ を A の measurable element という：

$$\mu_*(A - F) = \mu_*(F - A) = 0.$$

定義 2.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間とする.集合族 $\mathscr{A} \subset \mathfrak{F}$ に対して, 次の性質をもつ $B \in \mathfrak{F}$ を supremum とよぶ.

(i) 各 $A \in \mathscr{A}$ に対して　$\mu(A - B) = 0$, かつ

(ii) $\widetilde{B} \in \mathfrak{F}$ が (i) の性質をみたすとき, $\mu(B - \widetilde{B}) = 0$.

定理 2.1. $F \in \mathfrak{F}$ を $A \subset \Omega$ の measurable element とする.

(1) $\mu_*(A) \leqq \mu(F) \leqq \mu^*(A)$.

（2）$\mu(F \triangle G)=0$ なる $G \in \mathfrak{F}$ は，また A の measurable element である．

（3）$B \in \mathfrak{F}$ とするとき，$A \cap B$ は measurable element として $F \cap B$ をもつ．

証明.

$\mu(F)=\mu_*(F-A)+\mu^*(F \cap A)$ および $\mu_*(F-A)=0$, $\mu^*(F \cap A) \leqq \mu^*(A)$ より，（1）の右辺の不等式を得，また

$$\mu_*(A) \leqq \mu_*(A-F)+\mu^*(A \cap F),\ \mu_*(A-F)=0, \mu^*(A \cap F) \leqq \mu(F)$$

より，（1）の左辺の不等式を得る．

$$\begin{aligned}\mu_*(A-G) &\leqq \mu_*((A-G)-F)+\mu^*((A-G) \cap F)\\ &\leqq \mu_*(A-F)+\mu_*(F-G)=0,\\ \mu_*(G-A) &\leqq \mu_*((G-A) \cap F)+\mu^*((G-A)-F)\\ &\leqq \mu_*(F-A)+\mu(G-F)=0\end{aligned}$$

より，（2）の主張を得る．

$$\begin{aligned}\mu_*(A \cap B-F \cap B) &=\mu_*((A-F) \cap B) \leqq \mu_*(A-F)=0,\\ \mu_*(F \cap B-A \cap B) &=\mu_*((F-A) \cap B) \leqq \mu_*(F-A)=0\end{aligned}$$

より，（3）の主張を得る．

定義 2.3. $\mathfrak{M}_A$ を $A \subset \Omega$ の measurable element 全体からなる集合族とする．

また，$\mathfrak{M}$ を measurable element をもつ Ω の部分集合全体からなる集合族とする．

定理 2.2. （1）$\mathfrak{M}$ は $\overline{\mathfrak{F}}$ を含む σ − field である．

（2）$\mathfrak{M}_A$ は可算共通積で閉じている．特に，A が measurable kernel F（i.e. $A \supset F$ なる measurable element）をもてば，F は次の意味で最小のものである：

$$\mu(F-E)=0 \quad \text{for all} \quad E \in \mathfrak{M}_A.$$

また，A が measurable cover G（i.e. $A \subset G$ なる measurable element）をもてば，G は次の意味で最大のものである：

$$\mu(E-G)=0 \quad \text{for all} \quad E \in \mathfrak{M}_A.$$

（3）$B \in \mathfrak{F}$ に対し，$\mathfrak{M}_{A \cap B} \supset \mathfrak{M}_A \cap B$.

証明.

まず，$\lambda_A(B)=\mu_*(A \cap B)$ で定義される $\mathfrak{F}$ 上の集合関数 λ_A が $\mathfrak{F}$ 上の測度であることに注意する．

$\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{M}$ は明らか．従って，特に　$\Omega \in \mathfrak{M}$.

また，$A \in \mathfrak{M}$ なら，その measurable element を F とすると，A^c は F^c を measurable element としてもつから，$A^c \in \mathfrak{M}$. さらに，$\{E_n\} \subset \mathfrak{M}$ なら，

$$\lambda_{A^c}(\cup_n E_n) \leqq \Sigma_n \lambda_{A^c}(E_n)=\Sigma_n \mu_*(E_n-A)=0.$$

すなわち，$\mu_*(\cup_n E_n - A) = 0$．逆に，$\mu_*(A - \cup_n E_n) \leqq \mu_*(A - E_1) = 0$．

以上から，$\mathfrak{M}$は$\overline{\mathfrak{F}}$を含むσ－fieldである．

次に，$\{E_n\} \subset \mathfrak{M}_A$とする．すると，

$$\lambda_A(\cup_n E_n^c) \leqq \Sigma_n \lambda_A(E_n^c) = \Sigma_n \mu_*(A - E_n) = 0.$$

すなわち，$\mu_*(A - \cap_n E_n) = 0$．また，逆に，

$\mu_*(\cap_n E_n - A) \leqq \mu_*(E_1 - A) = 0$ より，$\cap_n E_n \in \mathfrak{M}_A$．

さて，Aが measurable kernel Fをもつとする．各$E \in \mathfrak{M}_A$に対し，

$$\mu(F - E) \leqq \mu_*(A - E) = 0.$$

また，measurable cover の場合にも同様に示せる．

（3）の主張は定理 2.1. ですでに証明ずみ．

注意 2.1. 一般に，Aの2つの measurable element E,Fの間に，関係：$\mu(E \triangle F) = 0$ は成り立たない．ただし，次がいえる．

定理 2.3. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を finite subset property をもつ測度空間とする．$A \in \mathfrak{B}^*$であり，また，E，FをAの measurable element とすれば，

$$\mu(E \triangle F) = 0.$$

証明.

任意の$B \in \mathfrak{F}_0$に対して，

$$\mu((E - F) \cap B) \leqq \mu^*((E - A) \cap B) + \mu_*((A - F) \cap B)$$
$$\leqq \mu_*(E - A) + \mu_*(A - F) = 0.$$

従って，finite subset property より$\mu(E - F) = 0$．

同様にして$\mu(F - E) = 0$ を得，これから主張が得られる．

系. $A \in \mathfrak{B}^*$が measurable kernel と measurable cover の両方をもてば，$A \in \overline{\mathfrak{F}}$．

特に，$(\mathfrak{B}^*)_0 \subset \overline{\mathfrak{F}}$である．

証明.

measurable kernel をF，measurable cover をGとすると，$F \subset A \subset G$かつ定理2.3. より

$\mu(G - F) = 0$．故に，$A \in \overline{\mathfrak{F}}$．

次に，supremum の性質をあげる．

定理 2.4. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を localizable な測度空間とし，集合族$\mathscr{A} \subset \mathfrak{F}$の supremum をBとする．

（1）Eが集合族$\mathscr{A}$の別の supremum ならば，$\mu(E \triangle B) = 0$．逆に，$E \in \mathfrak{F}$が$\mu(E \triangle B) = 0$をみたせば，Eは$\mathscr{A}$の supremum である．

（2）零集合からなる集合族の supremum は零集合である（特に，ϕととれる）．

(3) $G \subset E$ [resp. $E \subset G$] for all $E \in \mathscr{A}$ なる $G \in \mathfrak{F}$ が存在すれば，$B \cup G$ [resp. $B \cap G$] も $\mathscr{A}$ の supremum である．

(4) $\sup\{\mu(E);\ E \in \mathscr{A}\} \leqq \mu(B) \leqq \mu^*(\cup_E E)$.

証明.

E が別の supremum のとき，$\mu(E \triangle B) = 0$ の成立はその定義から明らか．

さて，E が $\mu(E \triangle B) = 0$ をみたすとする．任意の $A \in \mathscr{A}$ をとると，$\mu(A - B) = 0$ に注意して，

$$\mu(A - E) \leqq \mu(A - B) + \mu(B - E) = 0.$$

また，$\widetilde{B} \in \mathfrak{F}$ が定義2. 2. の条件 (i) をみたせば，B が supremum なることより $\mu(B - \widetilde{B}) = 0$. 従って，

$$\mu(E - \widetilde{B}) \leqq \mu(E - B) + \mu(B - \widetilde{B}) = 0.$$

これで (1) の主張が示された．

次に，零集合からなる集合族の supremum を N とする．ϕ は定義2. 2. の条件 (i) をみたすから，

$$\mu(N) = \mu(N - \phi) = 0.$$

さて，$G \subset E$ for all $E \in \mathscr{A}$ なる $G \in \mathfrak{F}$ が存在するとする．各 $E \in \mathscr{A}$ に対し，

$$\mu(E - B \cup G) \leqq \mu(E - B) = 0.$$

$\widetilde{B} \in \mathfrak{F}$ が $\mu(E - \widetilde{B}) = 0$ for all $E \in \mathscr{A}$ をみたせば，

$$\mu(B \cup G - \widetilde{B}) \leqq \mu(B \cup G - B) + \mu(B - \widetilde{B})$$
$$= \mu(G - B) \leqq \mu(E - B) = 0.$$

また，もう一方の場合も同様にでき,これで (3) の主張が示された．

最後に，(4) の主張を示す．　各 $E \in \mathscr{A}$ に対し，

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E - B) = \mu(E \cap B) \leqq \mu(B)$$

より，左辺の不等式が得られた．

次に，$A = \cup_E E$ として，A の measurable element を F とすると，$B \cap F$ も $\mathscr{A}$ の supremum となる．実際，各 $E \in \mathscr{A}$ に対し，

$$\mu(E - B \cap F) \leqq \mu(E - B) + \mu(E - F) \leqq \mu_*(A - F) = 0.$$

また，$\widetilde{B} \in \mathfrak{F}$ が $\mu(E - \widetilde{B}) = 0$ for all $E \in \mathscr{A}$ をみたすとすると，

$$\mu(B \cap F - \widetilde{B}) \leqq \mu(B - \widetilde{B}) = 0.$$

さて，(1) より，$\mu(B \triangle (B \cap F)) = \mu(B - F) = 0$ だから，

$$\mu(B) = \mu(B - F) + \mu(B \cap F) = \mu(B \cap F) \leqq \mu(F).$$

故に，定理2. 1. (1) より，$\mu(B) \leqq \mu(F) \leqq \mu^*(\cup_E E)$.

3. $(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ への推移性

finite subset property, localizable性，そして direct sum性について，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ と $(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ の間の推移性を調べる.

定理 3.1. (1) $(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ が finite subset propertyをもてば，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ も finite subset propertyをもつ.

(2) $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が direct sumな測度空間なら，$(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ も direct sumな測度空間である.

(3) $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が finite subset property [resp. localizable性，direct sum性] をもてば，$(\Omega, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{\mu})$ も finite subset property [resp. localizable性，direct sum性] をもつ.

証明.

ほとんど明らかであるが，例えば (1) だけでも示そう. $\mu(B) > 0$ なる $B \in \mathfrak{F}$ をとる. $B \in \mathfrak{B}^*$ より $\mathfrak{B}^*$ の finite subset propertyから，$E \subset B$ かつ $0 < \mu^*(E) < \infty$ なる $E \in \mathfrak{B}^*$ が存在する. すると，E の measurable cover G ($\subset$ B と取れる) $\in \mathfrak{F}$ が存在して，$\mu(G) = \mu(E)$ である. すると，

$$G \subset B \text{ かつ } 0 < \mu(G) < \infty.$$

注意 3.1. localizable性については，無条件での推移性は存在しない.

定理 3.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を finite subset propertyをもつ測度空間とする. $(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ が localizableであり，かつ条件：

(iii) $\mathfrak{B}^*$ の各元が measurable element ($\in \mathfrak{F}$) をもつ

をみたせば，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ も localizableである.

証明.

$\mathscr{A}$ を任意の部分族とする. 仮定より supremum $B \in \mathfrak{B}^*$ が存在し，またその measurable element E $\in \mathfrak{F}$ が存在する.

さて，この E が $\mathscr{A}$ の supremumであることを示す.

(イ) $$\mu(A - E) = 0 \text{ for all } A \in \mathscr{A}.$$

実際，任意の $F \in \mathfrak{F}_0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu((A - E) \cap F) &\leqq \mu^*((A - B) \cap F) + \mu^*((B - E) \cap F) \\ &\leqq \mu^*(A - B) + \mu_*(B - E) = 0.\end{aligned}$$

従って，finite subset propertyより $\mu(A - E) = 0$ を得る.

(ロ) $\widetilde{B} \in \mathfrak{F}$ を，$\mu(A - \widetilde{B}) = 0$ for all $A \in \mathfrak{F}$ をみたす任意の元とすると，$\mu(E - \widetilde{B}) = 0$.

実際，supremum性より $\mu^*(B - \widetilde{B}) = 0$ に注意して，任意の $F \in \mathfrak{F}_0$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu((E - B) \cap F) &\leqq \mu^*((E - B) \cap F) + \mu^*((B - B) \cap F) \\ &\leqq \mu_*(E - B) + \mu^*(B - \widetilde{B}) = 0.\end{aligned}$$

従って，finite subset property より　$\mu(E-\widetilde{B})=0$ を得る．

以上（イ）（ロ）から，E が $\mathscr{A}$ の supremum であることが示された．

注意 3.2. 上の定理では，$(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ の finite subset property は仮定されていない．また，条件（iii）が $\mathfrak{B}^*=\overline{\mathfrak{F}}$ の成立の重要な条件であるように，$(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ への推移性と $\mathfrak{B}^*=\overline{\mathfrak{F}}$ との間に深い関係がある．

4. strictly finite subset property

定義 4.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を finite subset property をもつ空間とする．条件：

(i)　　$\mu(E \cap B)=0$ for all $B \in \mathscr{A} \Rightarrow \mu(E)=0$

をみたす任意の部分族 $\mathscr{A} \subset \mathfrak{F}_0$ に対して，

$$\Omega - \cup_B B \subset N,\ ここで\ \mu(N)=0$$

なる $N \in \mathfrak{F}$ が存在するとき，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ は strictly finite subset property をもつという．

定理 4.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が direct sum な測度空間のとき，strictly finite subset property と strictly direct sum 性は同値である．

証明.

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が strictly finite subset property をもつとし，$\mathscr{A}=\{A_i, i \in I\}$ を任意の＊－分割とする．$\mathscr{A}$ は定義4.1.の条件（i）をみたすから，仮定より

$$\Omega - \cup_i A_i \subset N,\ ここで\ \mu(N)=0$$

なる $N \in \mathfrak{F}$ が存在する．従って，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ は strictly direct sum である．

逆に，$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が strictly direct sum であるとし，$\mathscr{A} \subset \mathfrak{F}_0$ を定義4.1.の条件（i）をみたす任意の部分族とする．

各 A_i に対して，$(A_i, A_i \cap \mathfrak{F}, \mu)$ は localizable であるから，族 $A_i \cap \mathscr{A}$ は supremum B_i（$\subset A_i$ と取れる）$\in \mathfrak{F}$ をもつ．すると，$\{B_i, i \in I\}$ は＊－分割となる．

従って，仮定より $\Omega - \cup_i B_i \subset N$，ここで $\mu(N)=0$，なる $N \in \mathfrak{F}$ が存在する．

ところで，定理2.4.(4) より　$\mu(B_i) \leqq \mu^*(A_i \cup \cup_E E)$ だから，

$$\mu^*(\Omega - \cup_E E) \leqq \mu^*(\Omega - \cup_i B_i)=0.$$

これは求める strictly finite subset property の成立を示し，主張が得られた．

定理 4.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が strictly finite subset property をもつ測度空間ならば，$(\Omega, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$ は finite subset property をもつ．

証明.

$F \in \mathfrak{B}^*$ とし，$\mu^*(F \cap B)=0$ for all $B \in (\mathfrak{B}^*)_0$ とする．各 $B \in \mathfrak{F}_0$ に対し $B \in (\mathfrak{B}^*)_0$ だから，

$\mu^*(F \cap B) = 0$ for all $B \in \mathfrak{F}_0$.

$F \cap B$ の measurable cover を E_B（$\subset B$ と取れる）とすれば，$\mu(E_B) = 0$.

ところで，$\mathfrak{F}_0$ 自身条件（i）をみたす．すると，$\mathscr{A} = \{B - E_B ; B \in \mathfrak{F}_0\} \subset \mathfrak{F}_0$ は明らかに条件（i）をみたすから，

$$\Omega - \cup_B (B - E_B) \subset N,\ \text{ここで}\ \mu(N) = 0$$

なる $N \in \mathfrak{F}$ が存在する．$\widetilde{B} = \cup_B (B - E_B)$ とおくと，$F \subset \Omega - \widetilde{B} \subset N$.

故に，$\mu^*(F) = 0$ となり主張が得られた．

文 献

[1] K.Sato, direct sum な測度空間について，法政大学多摩研究報告，4（1989）.
[2] K.Sato, direct sum な測度空間について（2），法政大学多摩研究報告，5（1990）.